数理解析研究所講究録
624巻 1987年 89-94

高次元結び目と球対のつくる可換半群

佐賀大学　丸本嘉彦　(Yoshihiko Marumoto)

ここでは n次元結び目で type p と呼ばれるものの代数的構造について報告する。くわしくは [1] を見られたい。

n次元結び目 K^n が type p であるとは次をみたす時である:

S^{n+2} 内に K^n と交わらないいくつかの $n-p+1$ 次元球面からなる link $\mathcal{L}$ が存在して,

(1) $\mathcal{L}$ は S^{n+2} 内で trivial link であり,

(2) S^{n+2} を $\mathcal{L}$ に沿って trivial surgery して得られる多様体内で K^n は $(n+1)$ 次元球の境界となる。

すると次が成り立っていることが示される,

定理1. ([1], [2])

(1) ribbon n-knot であることと type 1 であることは同値

(2) すべての 2-knot は type 2 である。

先の type p の定義と同値なものとして，もう少し constructive なものを採用できることを次の定理が保証してくれる；

<u>定理2.</u> $K^n \subset S^{n+2}$ が type p であるための必要十分条件は次が成り立つことである：

D^{n+3} の自明なハンドル分解 $D^{n+3} = D_0^{n+3} \cup \bigcup h_i^p \cup \bigcup h_i^{p+1}$

及び $(n+1)$ 次元球 $\Delta^{n+1} \subset \partial D_0^{n+3}$ が存在して次をみたす，

(1) $\Delta \cap h_i^p = \phi$ for $\forall i$,

(2) $\partial\Delta \cap h_i^{p+1} = \phi$ for $\forall i$,

(3) $(S^{n+2}, K^n) = (\partial D^{n+3}, \partial\Delta)$

上の定理において，$V = D_0^{n+3} \cup \bigcup h_i^p$，$\alpha_i$ を h_i^{p+1} の V への attaching map とするとき，$(V, \{\alpha_i\}, \Delta)$ を K^n の p-decomposition と呼ぶ。もちろん type p knot K^n の p-decomposition は本質的に異なるものがいくつも存在し得る。

上の定理2から次は容易に得られる；

<u>系2.1.</u>

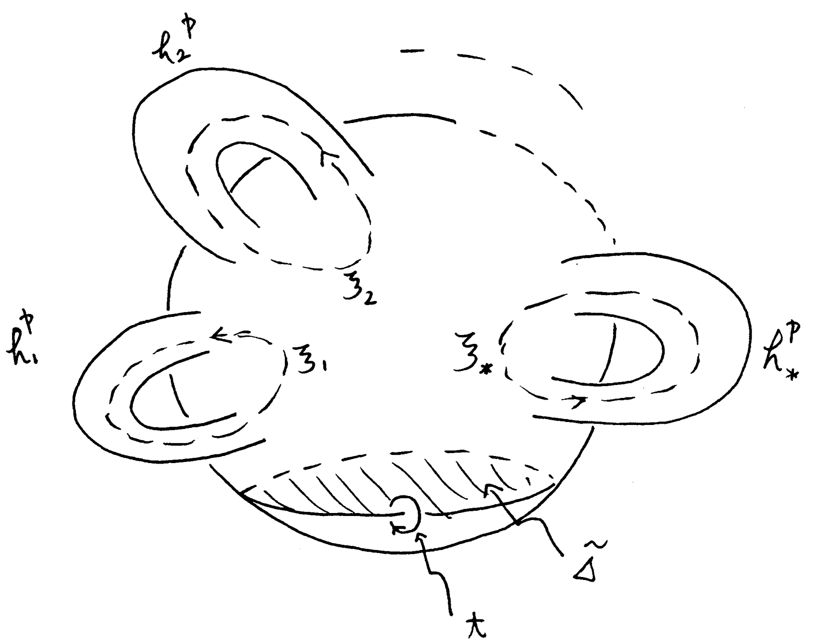
(1) type p knot は null-cobordant である。

(2) $2 \leqq p \leqq n-1$ とするとき，type p knot K^n に対して $\pi_1(S^{n+2} - K^n) \cong \mathbb{Z}$ である。

type p n-knot 全体の集合を $\mathcal{K}_n(p)$ と表すことにすると、$\mathcal{K}_n(p)$ は結び目の connected sum を和として可換半群となる。

以下 $2 \leqq p \leqq n-1$ として話をすすめる。

$K^n \in \mathcal{K}_n(p)$ に対して、その p-decomposition $(V, \{\alpha_i\}, \Delta)$ を1つ選ぶ。すると $V-\tilde{\Delta}$ は $S^1 \vee S_1^p \vee S_2^p \vee \cdots$ とホモトピー同値であり、$\pi_1(V-\tilde{\Delta}) \cong \mathbb{Z}$ であり、$\pi_p(V-\tilde{\Delta})$ は $\mathbb{Z}\pi_1$-加群として自由加群となり、V を構成する各 p-handle から自然にその生成元 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ が得られる。今 $\pi_1(V-\tilde{\Delta})$ の生成元を t で表し、$\Lambda = \mathbb{Z}\pi_1$ と書くことにする。ただし上で $\tilde{\Delta}$ は Δ の interior を V の interior に押し込めて得られる V に proper に埋め込まれた $n+1$ 次元球である。



attaching map α_j によって V に着けられる $(p+1)$-handle h_j^{p+1} の attaching sphere を a_i とすると，a_i は $\pi_p(V-\tilde{\Delta})$ の元を表していると見なされ，Λ-module の元として，

$$a_j = \sum_i \lambda_{ij}(t)\, \xi_i \qquad (\lambda_{ij}(t) \in \Lambda)$$

と表せる。このときできる正方行列 $(\lambda_{ij}(t))$ を K^n の（p-decomposition $(V, \{\alpha_i\}, \Delta)$ に対応する）attaching matrix と呼ぶ。もちろん K^n の p-decomposition が unique に決まらないので，attaching matrix は unique には決まらないし，1つの p-decomposition に対しても，attaching sphere a_i と base point の結び方により異なる attaching matrix になる。

次にいくつかの可換半群を以下の様に定義する：
Λ 上の正方行列 $M(t)$ で $\det M(1) = \pm 1$ となるもの全体の集合を $\mathrm{Mat}(\Lambda)$ と書くことにする。次の操作 $T_1 \sim T_4$ あるいはその逆操作を有限回くり返すことによる $\mathrm{Mat}(\Lambda)$ 上の同値関係を $\sim$ と表す：

T_1. 2つの行（あるいは列）を入れ換える，

T_2. 1つの行（あるいは列）に Λ の単元をかける，

T_3. 1つの行（あるいは列）の Λ の単元倍を他の行（or 列）に加える，

T_4. M を $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で置き換える。

(上の $T_1 \sim T_4$ は Whitehead 群を定義する時に用いられる操作と同じものである。)

このとき，$\mathcal{M}_1(\Lambda) = {\mathrm{Mat}(\Lambda)}/{\sim}$ とかき，行列のブロック和から自然に得られる演算を $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ に考えると，$\mathcal{M}_1(\Lambda)$ は可換半群となる（逆元を持たない元が存在するので群とはならない）。同様にして

$$\mathcal{M}_0(\Lambda) = \left\{ M(t) \in \mathrm{Mat}(\Lambda) \;\middle|\; {}^{\exists}m,\ M(t) : \Lambda^m \longrightarrow \Lambda^m : \text{全射} \right\} / \sim$$

と定義すれば，これも可換半群となる。

以上の準備の元で次が示される，

<u>定理 3</u> ([1])

$2 < 2p \leq n$ の時，可換半群としての完全系列

$$\mathcal{M}_0(\Lambda) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_1(\Lambda) \xrightarrow{\psi} \mathcal{K}_n(p) \longrightarrow \{1\}$$

が存在する。

ここで φ は包含写像であり，ψ は $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ の元に対してそれを attaching matrix とする p-decomposition から得られる n-

knotを対応させる。

（証明は [1] を見られたい）

定理3から次のことが分かる（というよりも、実は定理3の証明のための Lemmas として証明されるべきことであるが），

* $K^n \in \mathcal{K}_n(p)$ の attaching matrix に対する変形 $T_1 \sim T_4$ が幾何学的な操作として実現される．
* attaching matrix が同じなら同じ knot type を表す，
* $\varphi(\mathcal{M}_0(\Lambda))$ の元を attaching matrix として持つ $K^n \in \mathcal{K}_n(p)$ は unknot である．
* $\mathcal{K}_n(p)$ に属する knots は本質的に無限個ある．

References

[1] Y. Marumoto, Some higher dimensional knots, to appear

[2] Y. Marumoto, Knots と immersed disks, 数理研講究録 575 (1985), 174～184.